

Funksiyaning differensial

Aytaylik, $y=f(x)$ funksiya x_0 nuqtaning qandaydir atrofida aniqlangan bo'lsin.

10.4.1–ta'rif. Agar $y=f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi orttirmasi Δy argument orttirmasi Δx ga nisbatan chiziqli bosh qismga ega bo'lsa, bu chiziqli bosh qism funksiyaning x_0 nuqtadagi *differensial* deyiladi va dy yoki $df(x_0)$ bilan belgilanadi.

Demak, ta'rif bo'yicha x_0 nuqtada $y=f(x)$ funksiya differensial mavjud bo'lsa,

$$\Delta y = (A + \alpha)\Delta x = A\Delta x + \alpha\Delta x$$

kabi yozish mumkin bo'lib, bu yerda A -o'zgarmas, α esa $\Delta x \rightarrow 0$ da cheksiz kichik miqdordir.

Bu vaqtda,

$$dy = A\Delta x$$

bo'ladi.

Agar x_0 nuqtada $y=f(x)$ funksiya chekli hosilaga ega bo'lsa, yuqoridagi formulada $A=f'(x_0)$ bo'ladi. Buning aksinchasini ham ko'rsatish qiyin emas. Demak, funksiyaning differensial mavjud bo'lishi uchun qaralayotgan nuqtada u differensiallanuvchi bo'lishi zarur va yetarli, ya'ni

$$dy = f'(x_0)\Delta x$$

o'rinli ekan.

Endi, $y=x$ funksiya olsak, yuqoridagi formula asosida

$dy=\Delta x$ bo'lishini yoki $dx = \Delta x$ ekanligini ko'ramiz. Shunday qilib, argument (erkli o'zgaruvchi) differensialini orttirmasiga teng deb olsak, x_0 o'rniga ixtiyoriy x nuqta deb olsak funksiya differensial uchun

$$dy = f'(x) dx \quad (10.4.1)$$

ni olamiz.

Oxirgi olingan formuladan ko'rinadiki, *funksiya differensial uning grafigiga qaralayotgan nuqtada o'tkazilgan urinmaning orttirmasidan iborat bo'lar ekan (10.3.1-rasmda K_0N_0 kesma). Bu differensialning geometrik ma'nosidan iboratdir.*

Nihoyat, differensial formulasidan hosila funksiya va argument differensiallarining nisbatiga teng ekanligi ham kelib chiqadi:

$$y' = \frac{dy}{dx}.$$

Bu yerda o'ng tomondagi ifoda, biz oldin qabul qilganimizdek, hosila uchun belgilash emas, balki funksiya va argument differensiallarining nisbatidan iboratdir.

Funksiya differensial orttirmasining chiziqli bosh qismi ekanligidan

$$\Delta y \sim dy$$

ekanligi kelib chiqadi. Bundan funksiya qiymatini

$$y - y_0 \approx f'(x_0)\Delta x \Rightarrow f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$$

taqribiy hisoblash formulasini olamiz.

Masalan, $\sqrt[3]{126}$ ni taqribiy hisoblash talab qilingan bo'lsa, $f(x) = \sqrt[3]{x}$ funksiya $x_0=125$ nuqta atrofida qarab, yuqoridagi taqribiy hisoblash formulasidan foydalansak bo'ladi.

$$f(x_0) = \sqrt[3]{125} = 5; \quad f'(x) = (\sqrt[3]{x})' = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}};$$

$$f'(x_0) = \frac{1}{3\sqrt[3]{125^2}} = \frac{1}{3 \cdot 5^2} = \frac{1}{75}; \quad \Delta x = 126 - 125 = 1.$$

$$\sqrt[3]{126} \approx 5 + \frac{1}{75} \cdot 1 \approx 5,0133. \quad \sqrt[3]{125} \approx 5,0133.$$

Endi, murakkab funksiya differensialini qaraylik. Aytaylik, $z = \varphi(x)$ x_0 nuqtada, $y = f(z)$ esa $z_0 = \varphi(x_0)$ nuqtada differensiallanuvchi funksiyalar bo'lsin. U holda, $y = f[\varphi(x)]$ funksiya x_0 nuqtada differensiallanuvchi bo'lib, quyidagilar o'rinlidir:

$$dz = \varphi'(x_0)dx,$$

$$dy = f'[\varphi(x_0)] \cdot \varphi'(x_0)dx = f'(z_0)dz,$$

ya'ni, (ixtiyoriy z uchun)

$$dy = f'(z)dz$$

ni olamiz va uni (10.4.1) oddiy funksiya differensial formulasi bilan taqqoslasak, (10.4.1) da x ni z bilan almashtirish bilan oxirgi formulani olish mumkinligi ko'rinadi. Boshqacha aytganda, murakkab va oddiy funksiyalar differensial yozilishi jihatidan bir xil ekanligini ko'ramiz. Ya'ni, oddiy funksiya dan murakkab funksiya ga o'tishda differensial formulasi yozilishi jihatidan shaklini o'zgartirmaydi. Bu differensialning *invariantlik xossasi* deb yuritiladi.

Bu yerda differensiallashning asosiy qoidalaridagi barcha formulalar funksiyaning differensial uchun ham o'rinli ekanligini eslatamiz:

1. $dC = 0$ (C -constant);
2. $d(U \pm V) = dU \pm dV$;
3. $d(UV) = VdU + UdV$;
4. $d(CU) = CdU$ (C -constant);
5. $d\left(\frac{U}{V}\right) = \frac{VdU - UdV}{V^2}$.

10.5. Yuqori tartibli hosilalar va differensiallar

Yuqorida funksiyaning hosilasi argumentning ixtiyoriy qiymatida (aniqlanish sohasiga tegishli) mavjud bo'lsa, u ham funksiya dan iborat ekanligini ko'rdik.

Agar funksiya hosilasi ham hosilaga ega bo'lsa, *hosiladan olingan hosilani ikkinchi tartibli hosila* deb yuritiladi.

Funksiyaning hosilasini uning *birinchi tartibli hosilasi* deb qabul qilsak, umumiy holda quyidagi ta'rifni berish mumkin.

10.5.1-ta'rif. Agar funksiyaning $(n-1)$ tartibli hosilasi differensiallanuvchi bo'lsa, uning hosilasini funksiyaning n -tartibli hosilasi deyiladi va

$y^{(n)}$, $\frac{d^n y}{dx^n}$, $f^{(n)}(x)$, $\frac{d^n f(x)}{dx^n}$ kabi belgilanadi. Bu holda funksiya n marta differensiallanuvchi deyiladi.

Demak, ta'rif bo'yicha

$$y^{(n)} = (y^{(n-1)})', \quad n = 1, 2, \dots$$

bu yerda *funksiyaning nolinch tartibli hosilasi sifatida uning o'zini qabul qilish tabiiydir*, ya'ni $y^{(0)} = y$.

Eslatma. Yuqori tartibli hosilani belgilashda hosila belgisini kerakli marta takrorlash usuli ham qo'llaniladi. Masalan, y'' - ikkinchi, y''' - uchinchi va hokazo tartibli hosilalardir. Shuningdek, ba'zan rim raqamlari ham qo'llaniladi, masalan, y^{IV} - to'rtinchi, y^V - beshinchi va hokazo tartibli hosilalardir.

Quyidagi misollarni keltiramiz:

1-misol. $y = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$ bo'lsa,

$$y' = n a_0 x^{n-1} + (n-1) a_1 x^{n-2} + \dots + a_{n-1},$$

$$y^{(n)} = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 \cdot a_0 = a_0 n!,$$

$$y^{(n+1)} = y^{(n+2)} = \dots = 0.$$

Demak, n - darajali ko'phadning n - tartibli hosilasi o'zgarmas son bo'lib, $(n+1)$ - tartibli hosilasidan boshlab yuqori tartibli hosilalarining barchasi nolga teng bo'lar ekan.

2-misol. $f(x) = e^{kx}$, k - o'zgarmas ($k \neq 0$).

$$f'(x) = e^{kx} (kx)' = k e^{kx};$$

$$f''(x) = (f'(x))' = (k e^{kx})' = k (e^{kx})' = k k e^{kx} = k^2 e^{kx}$$

va hokazo,

$$f^{(n)}(x) = k^n e^{kx}$$

ni olamiz. Demak,

$$(e^{kx})^{(n)} = k^n e^{kx}, \quad n \in \mathbb{N}$$

3-misol. $f(x) = \sin x$.

$$f'(x) = \cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2}),$$

$$f''(x) = (f'(x))' = (\sin(x + \frac{\pi}{2}))' = \cos(x + \frac{\pi}{2}) \cdot 1 = \sin(x + \pi),$$

$$f^{(n)}(x) = \sin(x + n \cdot \frac{\pi}{2}),$$

$$\text{ya'ni} \quad (\sin x)^{(n)} = \sin(x + n \cdot \frac{\pi}{2}), \quad n \in \mathbb{N}$$

4-misol. $f(x) = \cos x$.

Yuqoridagiga o'xshash,

$$(\cos x)^{(n)} = \cos(x + n \cdot \frac{\pi}{2}), \quad n \in \mathbb{N}$$

ni olish mumkin.

5-misol. $f(x) = U \cdot V$, bu yerda U va V lar ixtiyoriy tartibli hosilalari mavjud funksiyalardir.

$$(U \cdot V)' = U'V + UV'$$

$$(UV)' = (U'V + UV)' = U''V + U'V' + U'V' + UV'' = U''V + 2U'V' + UV''$$

va hokazo.

$$(U \cdot V)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k U^{(n-k)} \cdot V^{(k)}$$

ni olish mumkin. Bu *Leybnis formulasi* deb yuritiladi. Bu yerda nolinchii tartibli hosila funksiyaⁿⁱning o'zi ekanligini eslash lozim.

Endi, yuqori tartibli differensial tushunchasini kiritamiz. Buning uchun funksiya differensialini uning birinchi tartibli differensialni argument orttirmasini o'zgarmas deb qabul qilgan holda $(n-1)$ – tartibli differensialning differensialini *n-tartibli differensial deb ataymiz* va uning uchun $d^n y$, $d^n f(x)$ kabi belgilashlarni qo'llaymiz.

Demak, ta'rif bo'yicha $d^n y = d(d^{n-1}y)$ ekan. Oxirgi formula asosida

$$d^2 y = d(dy) = d[f'(x)dx] = (f''(x)dx)dx = f''(x)dx^2$$

va hokazo,

$$d^n y = f^{(n)}(x)dx^n$$

formulani olamiz.

Bu yerda *ikkinchi va undan yuqori tartibli differensiallar birinchi tartibli differensialning invariantlik xossasiga ega emasligini ammo, oraliq o'zgaruvchi bo'lgan murakkab funksiya argumenti (erkli o'zgaruvchi)ning chiziqli funksiyasi bo'lgan holda bu xossa saqlanishini aytamiz.*

Yuqori tartibli hosila ma'nolariga kelsak, agar moddiy nuqta $S=S(t)$ qonun bo'yicha to'g'ri chiziqli bo'ylab harakatlanayotgan bo'lsa, undan (yo'l funksiyasidan) olingan birinchi tartibli hosila moddiy nuqtaning tezligi $\mathcal{S}=\mathcal{S}(t)$ ekanligi bizga ma'lum, ya'ni

$$\mathcal{S} = \frac{dS}{dt}.$$

Agar tezlanishni qaralsa,

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathcal{S}}{\Delta t} = \frac{d\mathcal{S}}{dt}$$

ekanligini chiqarish qiyin emas. Yoki

$$a = \frac{d\mathcal{S}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dS}{dt} \right) = \frac{d^2 S}{dt^2}.$$

Demak, *to'g'ri chiziqli harakatda bo'lgan moddiy nuqtaning tezlanishi uning yo'l funksiyasidan olingan ikkinchi tartibli hosilaga teng ekan.* Bu ikkinchi tartibli hosilaning fizik ma'nosidir. Geometrik ma'nosini keyinroq ko'ramiz.

10.6. Differensiallanuvchi funksiyalar haqidagi teoremlar

Bu bandeda differensial hisobida nazariy tatbiqlari muhim ahamiyatga ega bo'lgan teoremlarni keltiramiz.

10.6.1-teorema (Ferma). Agar $f(x)$ funksiya $(a;b)$ oraliqda aniqlangan bo'lib, $x_0 \in (a;b)$ nuqtada eng kichik yoki eng katta qiymatga erishsa va shu nuqtada differensiallanuvchi bo'lsa, $f'(x_0)=0$ bo'ladi.

Isbot. Aniqlik uchun $\sup_{x \in (a,b)} f(x) = f(x_0)$ deylik. U holda,

$\forall x \in (a;b)$ $f(x) \leq f(x_0)$ o'rinlidir. Endi, x_0 nuqtaga Δx ortirma berib, funksiya orttirmasi Δy ni olsak,

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \leq 0$$

bo'ladi. U holda,

$$\Delta x < 0 \text{ bo'lganda } \frac{\Delta y}{\Delta x} \geq 0,$$

$$\Delta x > 0 \text{ bo'lganda } \frac{\Delta y}{\Delta x} \leq 0.$$

Oxirgi tengsizliklarda $\Delta x \rightarrow 0$ dagi limitga o'tib, $f'(x_0)$ mavjudligini hisobga olsak,

$$f'(x_0) \geq 0 \text{ va } f''(x_0) \leq 0$$

larni olamiz. Bulardan $f'(x_0) = 0$ kelib chiqadi.

$\inf_{x \in (a,b)} f(x) = f(x_0)$ hol ham huddi shunga o'xshash qaraladi.

Teorema isbotlandi.

10.6.2–teorema(Roll). Agar $f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada aniqlangan, uzluksiz va $(a;b)$ oraliqda differensiallanuvchi bo'lib, kesmaning chetki nuqtalarida teng ($f(a)=f(b)$) qiymatlar qabul qilsa, $(a;b)$ oraliqda shunday c nuqta topiladiki, bu nuqtada funksiya hosilasi nolga teng ($f'(c)=0$) bo'ladi.

Isbot. Agar $[a;b]$ da funksiya o'zgarmas bo'lsa, teorema isboti aniqdir, ya'ni c nuqta sifatida $(a;b)$ ning ixtiyoriy nuqtasini olish mumkin, chunki bu oraliqda funksiya hosilasi nolga teng bo'ladi. Demak, funksiya $[a;b]$ da o'zgaruvchi bo'lgan holni qarash kifoyadir. Bu holda $f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada uzluksiz bo'lganligi sababli, bu kesmada shunday x_1 va x_2 nuqtalar mavjud bo'ladiki, ularda funksiya o'zining eng katta va eng kichik qiymatlarini qabul qiladi. Bu nuqtalardan aqalli bittasi $(a;b)$ ning ichki nuqtasidan iborat bo'ladi, (aks holda funksiya o'zgarmas bo'lib qolar edi), o'shani c deb olib, isbotlangan Ferma teoremasiga ko'ra $f'(c)=0$ ni olamiz. Teorema isbotlandi.

10.6.3–teorema(Lagranj). Agar $f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada aniqlangan, uzluksiz va $(a;b)$ oraliqda differensiallanuvchi bo'lsa, $(a;b)$ oraliqda shunday c nuqta topiladiki, $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$ o'rinli bo'ladi.

Isbot. $\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ yordamchi funksiyanı kiritsak, u

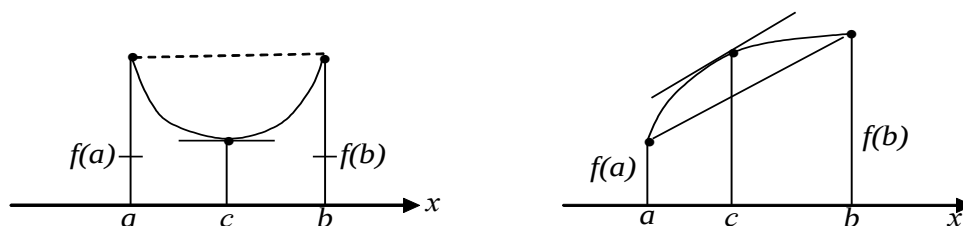
yuqoridagi Roll teoremasi shartlarini qanoatlantiradi. Demak, shunday $c \in (a;b)$ mavjudki, $\varphi'(c)=0$ bo'ladi.

$$\varphi'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

da $x=c$ desak, teorema isboti kelib chiqadi.

Yuqorida keltirilgan Roll va Lagranj teoremlari quyidagicha geometrik talqinlarga ega. Ya'ni, Lagranj teoremasi shartlari bajarilsa, aqalli bitta shunday $c \in (a;b)$ nuqta topiladiki, grafikning bu nuqtasiga o'tkazilgan urinma grafik chetki nuqtalarini tutashtiruvchi kesmaga parallel bo'ladi. Roll teoremasida grafik chetki nuqtalarini tutashtiruvchi kesma Ox o'qiga parallel bo'lganligi sababli urinma absissalar o'qiga paralleldir (10.6.1-rasmga qarang). Shu bilan birga bunday nuqta aqalli bitta bo'lishi aytilgan bo'lib, ular bir nechta bo'lishi ham mumkindir.

**10.6.4 -
teorema
(Koshi).** Agar
 $f(x)$ va $g(x)$
funksiyalar $[a;b]$
kesmada
aniqlangan,



10.6.1-rasm

uzluksiz va $(a;b)$ oraliqda differensiallanuvchi bo'lib, $g'(x) \neq 0$ bo'lsa, shunday $c \in (a;b)$ topiladiki,

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

o'rinli bo'ladi.

Isbot. Avval teorema xulosasidagi tenglikning har ikki tomonidagi ifodalar ham ma'noga ega ekanligini aytamiz. Haqiqatdan ham, o'ng tomon uchun bu ayondir. Chap tomonni olsak, nisbat ma'noga ega bo'lmasligi uchun $g(a)=g(b)$ bo'lishi kerak, bu holda Roll teoremasi asosida $(a;b)$ ning biror ichki nuqtasida $g'(x)=0$ bo'lishi kerak, bu esa teorema shartiga ziddir. Demak, $g(a) \neq g(b)$ ekan.

Endi,

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \cdot [g(x)-g(a)]$$

funksiya yordamida teorema isbotiga kelimiz (bunga ishonch hosil qilishni o'quvchining o'ziga qoldiramiz).

1-eslatma. Lagranj teoremasi xulosasidagi tenglikda $a=x_0$; $b=x_0+\Delta x$ deb faraz qilinsa, uni

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0 + \theta \Delta x)$$

ko'rinishda yozish mumkin bo'ladi, bu yerda $c=x_0+\theta \Delta x$ deb olingan bo'lib, $0 < \theta < 1$. Oxiridan esa,

$$\Delta y = f'(x_0 + \theta \Delta x) \cdot \Delta x$$

ga kelimiz. Bu funksiya orttirmasi uchun yana bir formula bo'lib, uni *chekli orttirmalar formulasi* deb yuritiladi.

2-eslatma. Agar x_0 nuqta atrofida $f(x)$ funksiya differensiallanuvchi bo'lsa, u bu atrofda uzluksizligi ma'lumdur. Bu holda uning hosilasi $f'(x)$ x_0 nuqtada yoki uzluksiz bo'lishi yoki ikkinchi jins uzilishga ega bo'lishi, ammo, birinchi jins uzilishga ega bo'laolmasligi isbotlangandir.

Haqiqatdan ham, agar x_0 nuqta atrofida $f(x)$ ning hosilasi mavjud bo'lib, bu nuqtada $f'(x)$ birinchi jins uzilishga ega deb faraz qilsak, $f'(x_0) \neq \lim_{x \rightarrow x_0+0} f'(x)$ yoki $f'(x_0) \neq \lim_{x \rightarrow x_0-0} f'(x)$ lardan aqqalli bittasi o'rinli bo'lishi kerak. Ammo, funksiya differensiallanuvchi bo'lganligi sababli

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

chekli hosila hamda bir tomonli

$$\lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$$

hosilalar mavjuddir. Ikkinchi tomondan Lagranj teoremasi asosida $\Delta y = f'(x_0 + \theta \Delta x) \cdot \Delta x$ ni olamiz. Bu yerda $0 < \theta < 1$ va bundan

$$\lim_{x \rightarrow x_0 \pm 0} f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow \pm 0} f'(x_0 + \theta \Delta x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$$

bo'lib, $f'(x)$ ning uzluksiz bo'lishi, ya'ni qilingan faraz noto'g'ri ekanligi kelib chiqadi. Bu esa, funksiyaning nuqtadagi bir tomonli hosilasi bilan hosilasining bir tomonli limiti aynan tushunchalar emasligini ko'rsatadi.

Masalan.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0. \end{cases}$$

funksiyani olsak, uning hosilasi $x \in (-\infty; \infty)$ mavjuddir.

Haqiqatdan ham,

$$f'(x) = \begin{cases} 0, & x = 0; \\ 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0 \end{cases}$$

hamda $f'(-0) = f'(+0)$ ekanligiga ishonch hosil qilish osondir.

Bundan $x=0$ nuqtada $f'(0)=0$ mavjud bo'lib, $\lim_{x \rightarrow -0} f'(x)$ va $\lim_{x \rightarrow +0} f'(x)$ limitlarning ikkalasi ham mavjud emasligini ko'rish qiyin emasdir. Demak, bu funksiyaning hosilasi 0 nuqtada mavjud bo'lib, bu nuqtada ikkinchi jins uzilishga egadir.

3-eslatma. Agar $f(x)$ funksiyaning hosilasi biror $(a;b)$ oraliqda aynan nolga teng bo'lsa, funksiya bu oraliqda o'zgarmas bo'lishi ham Lagranj teoremasi yordamida isbotlanadi.

Haqiqatdan ham, agar $(a;b)$ oraliqda $f'(x) \equiv 0$ bo'lsa, $x_0 \in (a;b)$ biror qo'zg'almas va $\forall x \in (a;b)$ nuqtalarni olsak, $x \neq x_0$ bo'lgan holda chekli orttirmalar

$$\Delta y = f'(x_0 + \theta \Delta x) \Delta x \quad (0 < \theta < 1)$$

formulasiga ko'ra, $\forall x \in (a;b)$ $f'(x) \equiv 0$ ekanligidan

$$f(x) - f(x_0) = \Delta y = 0 \cdot \Delta x = 0 \Rightarrow f(x) = f(x_0)$$

ni olamiz. Bu funksiyaning $(a;b)$ oraliqda o'zgarmas ekanligini ko'rsatadi.